



# **Méthode semi-lagrangienne pour interpolation WENO ponctuelle**

Francesco Vecil

travail dirigé par José Antonio Carrillo

- Description de la méthode PWENO
  - L'idée à la base
  - Les indicateurs de régularité  $\beta_r$
  - Les poids  $d_r(x)$
- Application de PWENO à la méthode semi-lagrangienne
- Tests
  - Precision
  - Variation totale
- Quelques applications
  - Rotation  $1D$  avec un opérateur Boltzmann linéaire
  - Ammortissement de Landau  $1D$  linéaire et non linéaire

## Description de la méthode

### L'idée à la base

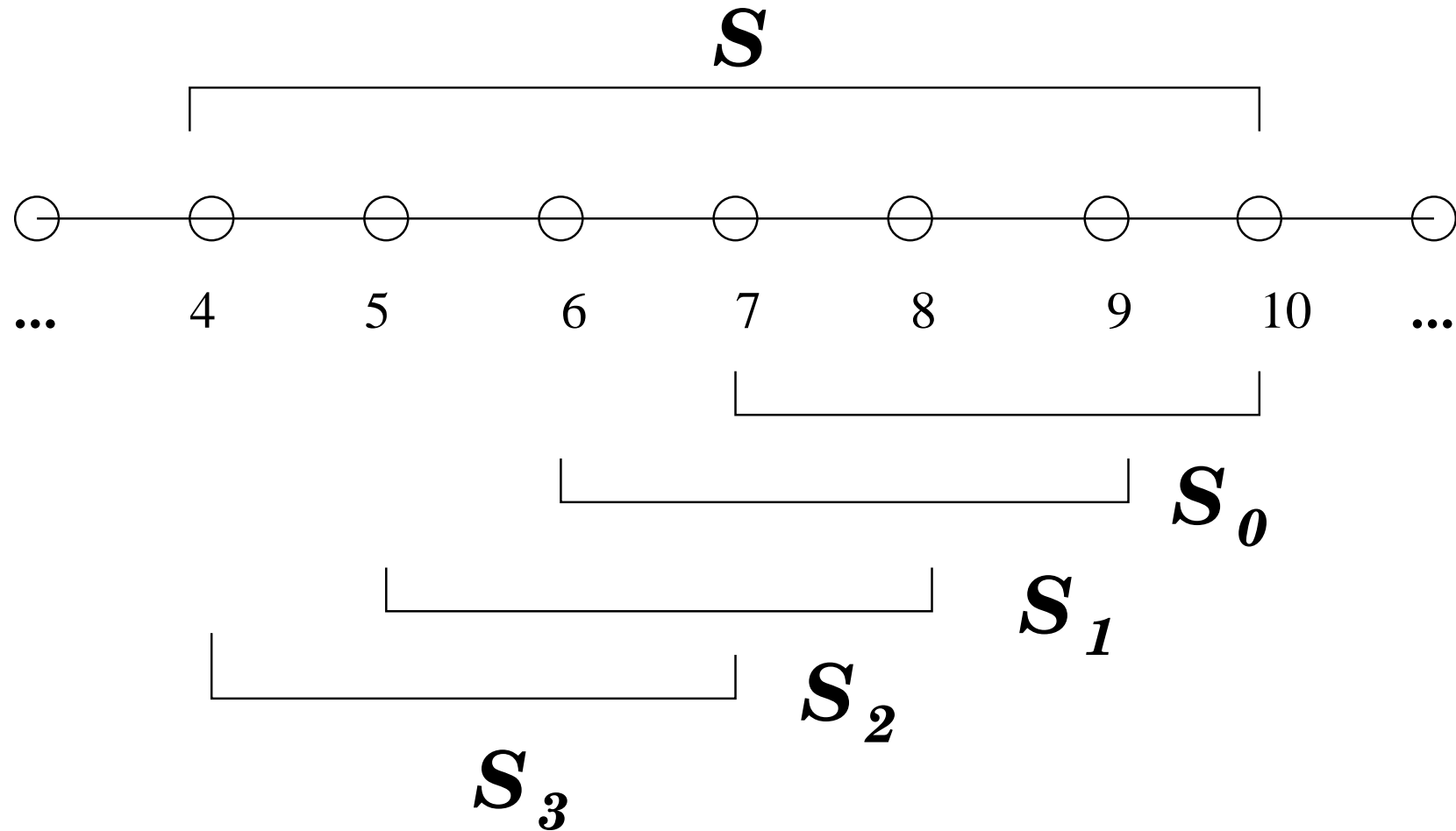
Cette méthode est une interpolation directe; cela veut dire qu'on reconstruit la valeur de la fonction  $f$  qu'on connaît dans les points de la grille  $x_i$ , non pas le flux pour après construire des schémas en différences finies.

L'idée générale est de faire une combinaison convexe entre plusieurs polynômes de Lagrange  $p_r(x)$  chacun desquels interpole  $f$  en un certain nombre de points:

$$p^W(x) = \sum_{r=0}^{nlp-1} \omega_r(x) p_r(x)$$

Par rapport aux notations, on appellera *ntot* le nombre total de points, *lpo* le nombre de points interpolés par chaque polynôme et *nlp* le nombre de polynômes

de Lagrange. Brèvement, on parlera de WENO- $ntot, lpo$ .



On veut une approximation non oscillante, i.e. lorsque des forts gradients apparaissent la variation totale reste contrôlée, pour l'appliquer à des problèmes de physique où il faut éviter des oscillations parasites supplémentaires.

### Les indicateurs de régularité

Il faut mesurer la régularité des reconstructions par polynômes de Lagrange dans chaque substencil. Les indicateurs de régularité sont ainsi définis:

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{lp_0-1} \Delta x^{2l-1} \|D^l p_r(x)\|_{L^2_{[\varepsilon_{sx}, \varepsilon_{dx}]}}^2$$

où on voit qu'on prend en considération toutes leurs dérivées. Ce n'est pas le seul choix possible, mais c'est toujours ceci qui est utilisé et il est de facile implementation.

Maintenant on construit la première version non normalisée des coefficients  $\omega_r(x)$ :

$$\tilde{\omega}_r(x) = \frac{d_r(x)}{(\epsilon + \beta_r)^p}$$

où les  $d_r(x)$  sont des coefficients dont on va parler,  $\epsilon$  est une constante réelle dont on a besoin dans le code pour que le dénominateur ne s'annule pas et  $1 \leq p < \infty$  est une constante qui sert pour peser l'exclusion des substencils où les polynômes de Lagrange sont moins réguliers. On prendra toujours  $p = 2$ .

### Les poids $d_r(x)$

Les poids  $d_r(x)$  doivent satisfaire

$$\begin{cases} d_r(x) \geq 0 \\ \sum_{r=0}^{nlp-1} d_r(x) = 1 \end{cases}$$

Avec ces conditions, la méthode PWENO- $ntot, lpo$  est d'ordre  $lpo + 1$ . Par un bon choix des  $d_r(x)$  on peut améliorer la précision lorsque la fonction à reconstruire est très régulière, cas dans lequel l'interpolation par polynômes de Lagrange sur le stencil entier  $\mathcal{S}$  donne l'ordre optimale  $ntot$  et une haute précision. On veut forcer  $p^W$  à se rassembler à Lagrange. On définit les poids  $d_r(x)$  comme ça:

$$p(x) = \sum_{r=0}^{nlp-1} d_r(x) p_r(x)$$

(où  $p(x)$  est le polynôme qui interpole en tout  $\mathcal{S}$ ).

Finalment on normalise

$$\omega_r(x) = \frac{\tilde{\omega}_r(x)}{\sum_{j=0}^{nlp-1} \tilde{\omega}_j(x)}.$$

En sacrifiant quelques ordres par rapport aux polynômes de Lagrange, on obtient une méthode non oscillante si la fonction n'est pas régulière (i.e. les indicateurs  $\beta_r$  ne sont pas du même ordre). Si la fonction est régulière (les  $\beta_r$  du même ordre) elle se rapproche à l'interpolation de Lagrange.



## La méthode semi-lagrangienne

On prend l'équation du transport

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [a(t, x) f] = 0 & (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R} \\ f(t_0, x) = f_0(x) \end{cases}$$

Une caractéristique est définie par

$$\frac{d\mathcal{X}}{ds} = a(s, \mathcal{X}(s)), \quad \mathcal{X}(t) = x,$$

et si on appelle

$$J(s; t, x) = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x}$$

son jacobien, alors (avec des conditions de régularité), on a

$$f(t, x) = f_0(\mathcal{X}(0, t, x)) \mathcal{J}(0, t, x)$$

Dans le cas le plus simple,  $a$  est une constante, et on a

$$f(t, x) = f_0(x - at)$$

L'idée de la méthode PWENO semilagrangienne est de calculer les pas en temps comme cela: en connaissant  $f(t^n, x_i)$

$$f(t^{n+1}, x_i) = f(t^n, x_i - a\Delta t).$$

Dans des cas en dimension plus élevée on utilisera des time-splittings, ce qui veut dire qu'on se réduit toujours à des problèmes  $1D$ .

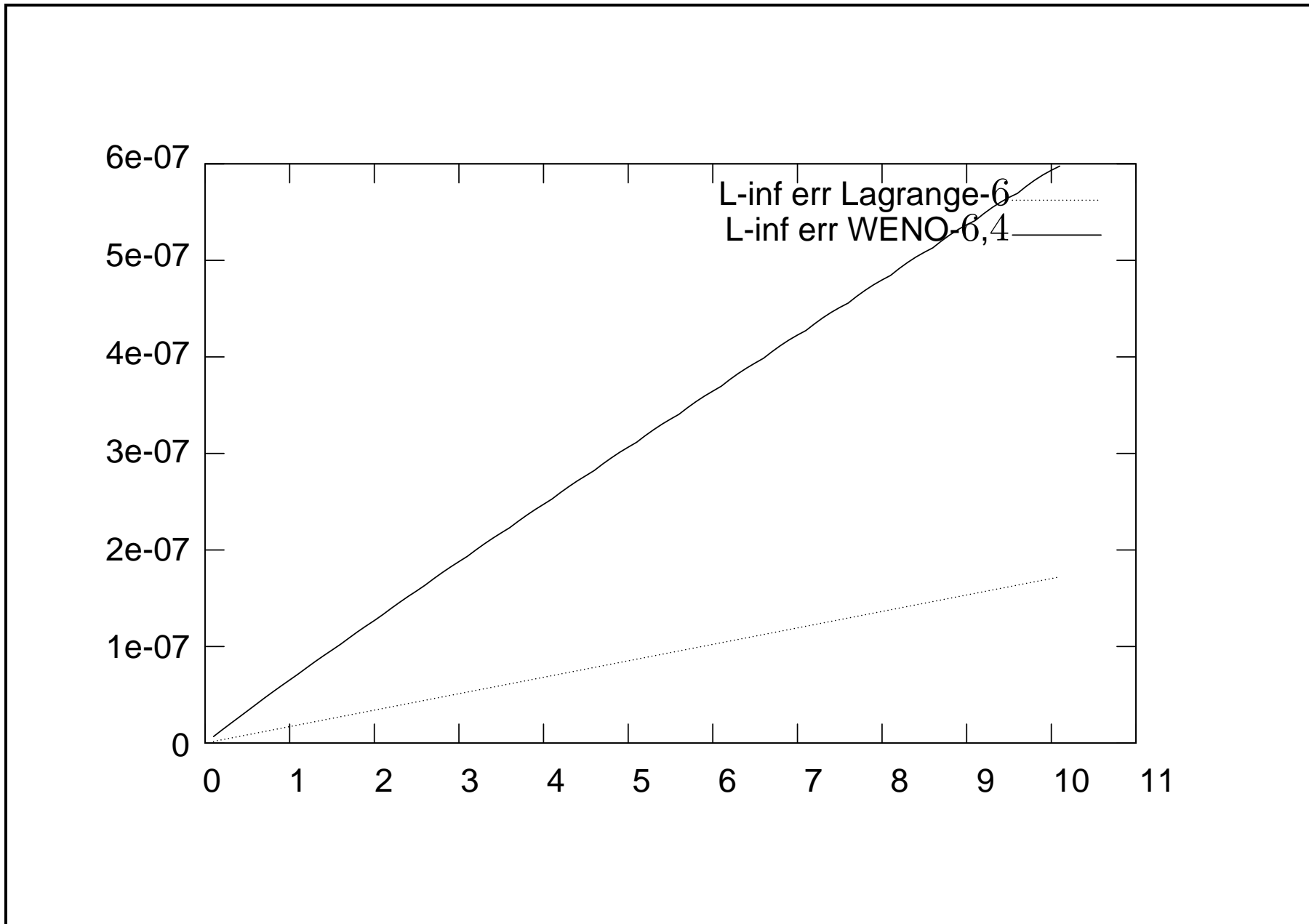
## Tests

### Précision

Dans le cas de fonctions très régulières, l'interpolation de Lagrange donne des résultats plus précis. On prend

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ f_0(x) = \sin^2(x) \end{cases}$$

et on étudie l'évolution de l'erreur  $L^\infty$  par rapport à la solution exacte.

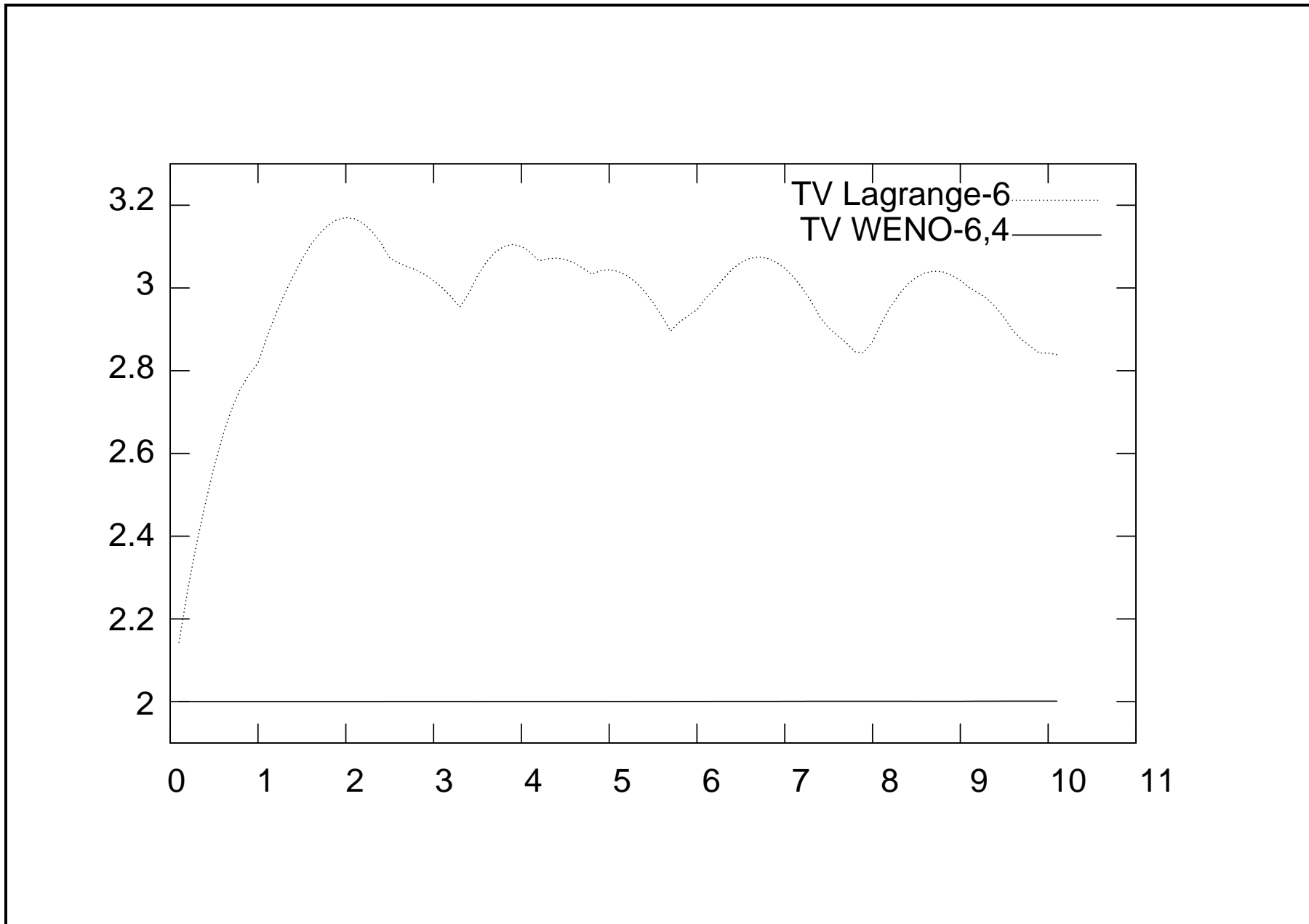


## Variation totale

On prend l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ f_0(x) = \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \end{cases}$$

et on étudie l'évolution de la variation totale par rapport au temps. La méthode PWENO contrôle la variation totale, lorsque par l'interpolation de Lagrange des fortes oscillations se produisent.

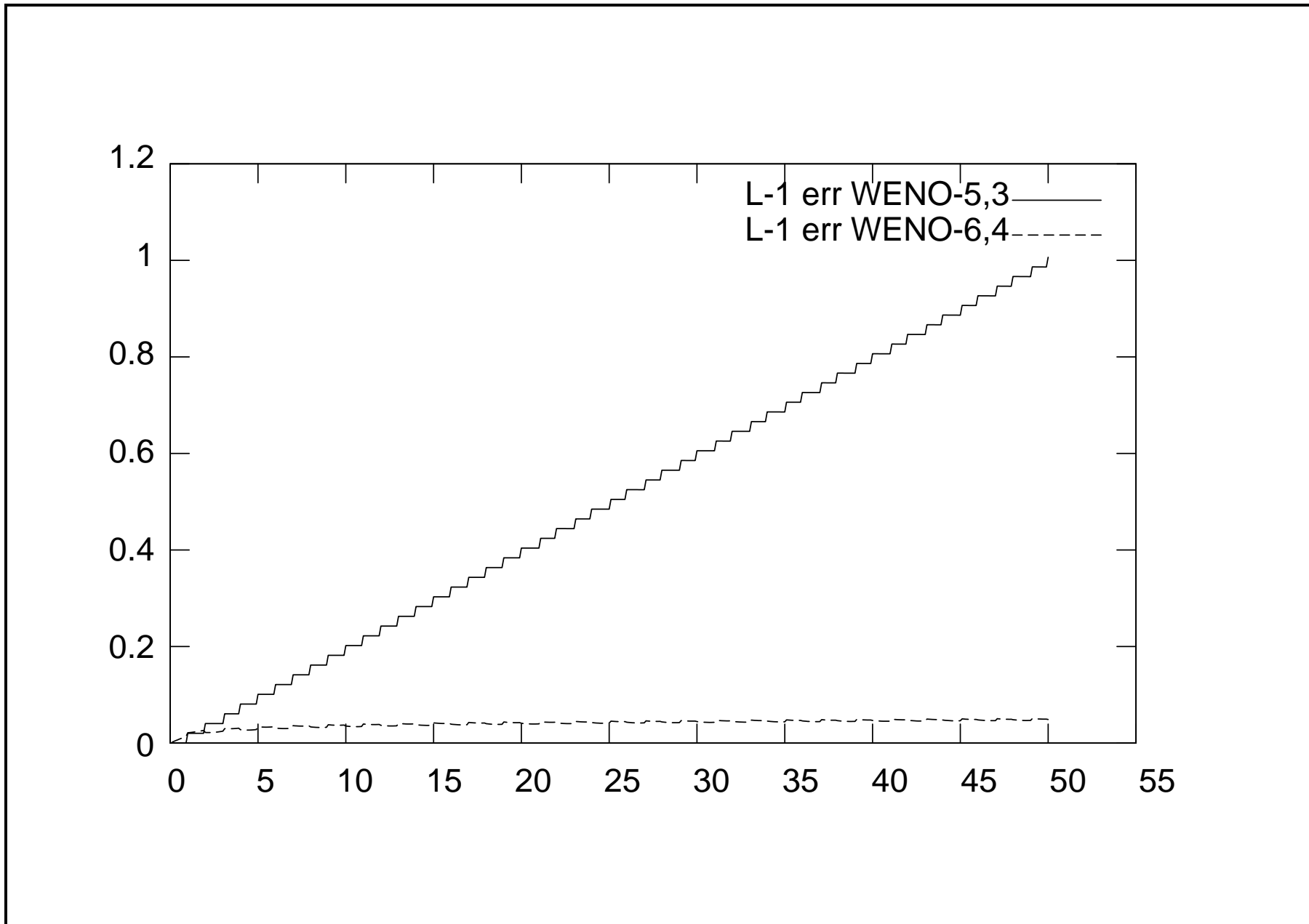


## Le choix des paramètres

Si on choisit non accuramment les paramètres de la méthode PWENO, des fortes erreurs de dispersion peuvent se vérifier. On resout

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ f_0(x) = \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \end{cases}$$

par PWENO-6,4 et par PWENO-5,3, et on trace l'erreur  $L^1$  par rapport à la solution exacte.





Il faut que

$$lpo \geq \left[ \frac{ntot + 1}{2} \right] + 1$$

et il vaut mieux que le nombre de points soit pair.

## Quelques applications

**Rotation avec un *BGK*.** Prenons le cas de la rotation avec un terme de collision linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\tau} [\rho M_1 - f] \\ f(0, x, v) = \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) e^{-\frac{v^2 + x^2}{2}} \end{cases}$$

On resout cela par la combinaison de deux time splittings: un entre Vlasov et Boltzmann et l'autre dans Vlasov entre les dimensions  $x$  et  $v$ . Ce dernier s'effectue par la méthode semi-lagrangienne couplée avec PWENO.

La théorie a prévu que la solution  $f$  converge en normes  $L^1$  et  $L^\infty$  vers un equilibrium globale

$$f_s(x, v) = z \exp \left( -\frac{x^2}{2\theta_0} \right) e^{-\frac{v^2}{2\theta_0}}$$

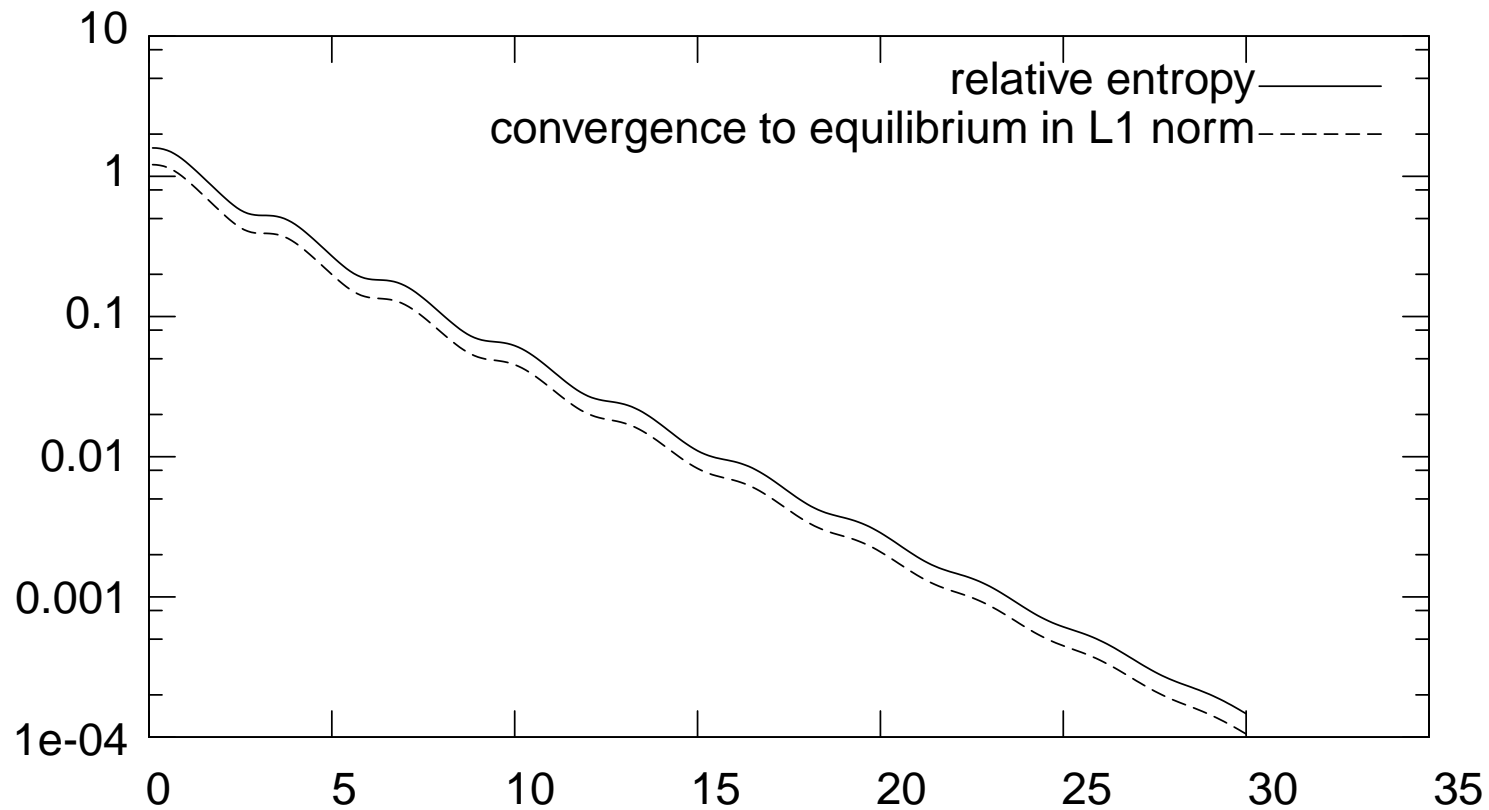
et que les entropies relatives

$$\left\{ \begin{array}{l} H[f; f_s] = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f - f_s|}{f_s^2} dv dx \\ \tilde{H}[f; \rho M_{\theta_0}] = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f - \rho M_{\theta_0}|}{f_s^2} dv dx \end{array} \right.$$

aient des oscillations (ainsi comme la distribution  $f$ ).

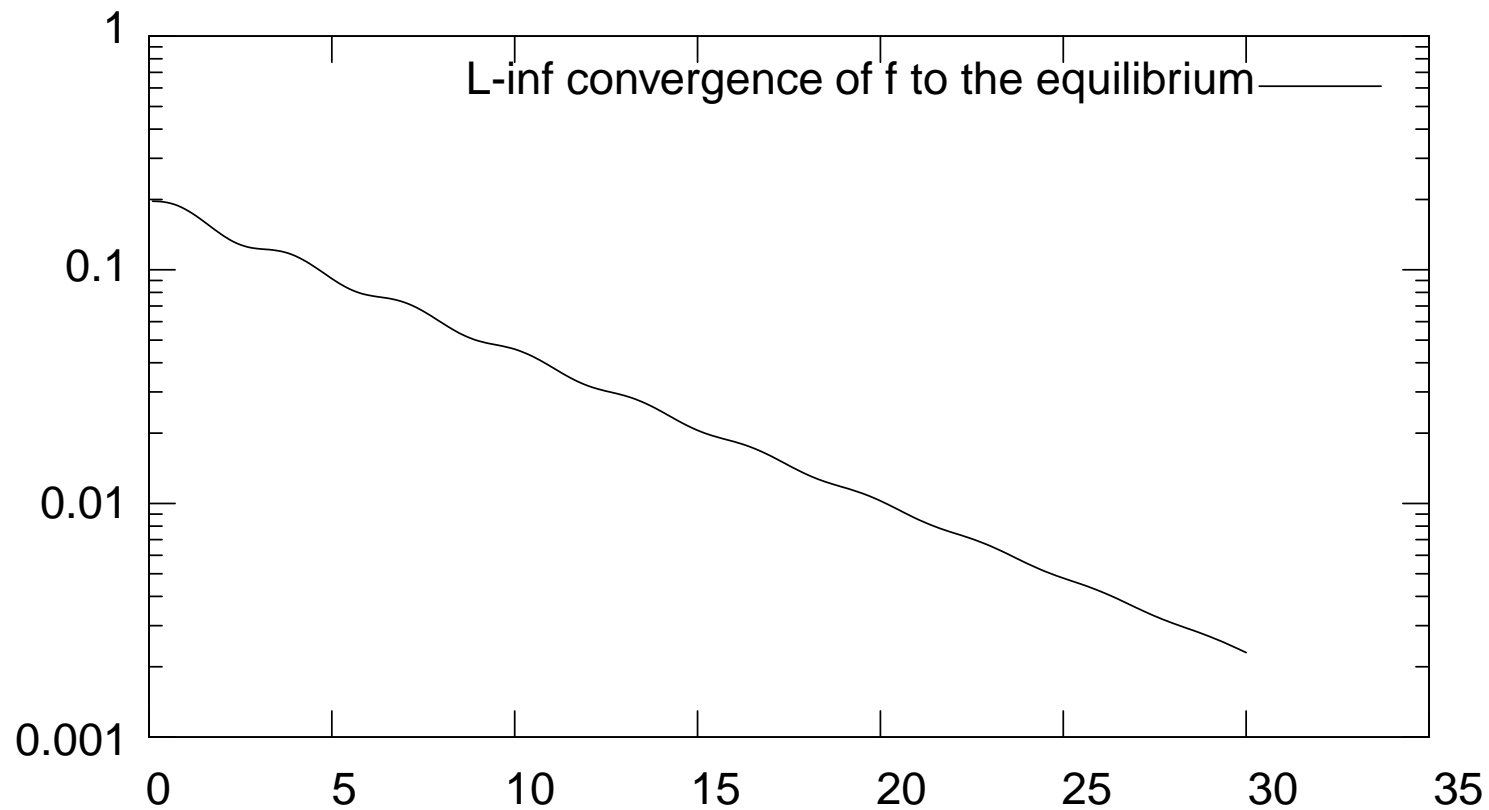
Voici la convergence en norme  $L^1$  vers  $f_s$

256 x 256 points, dt=0.1, WENO-6,4



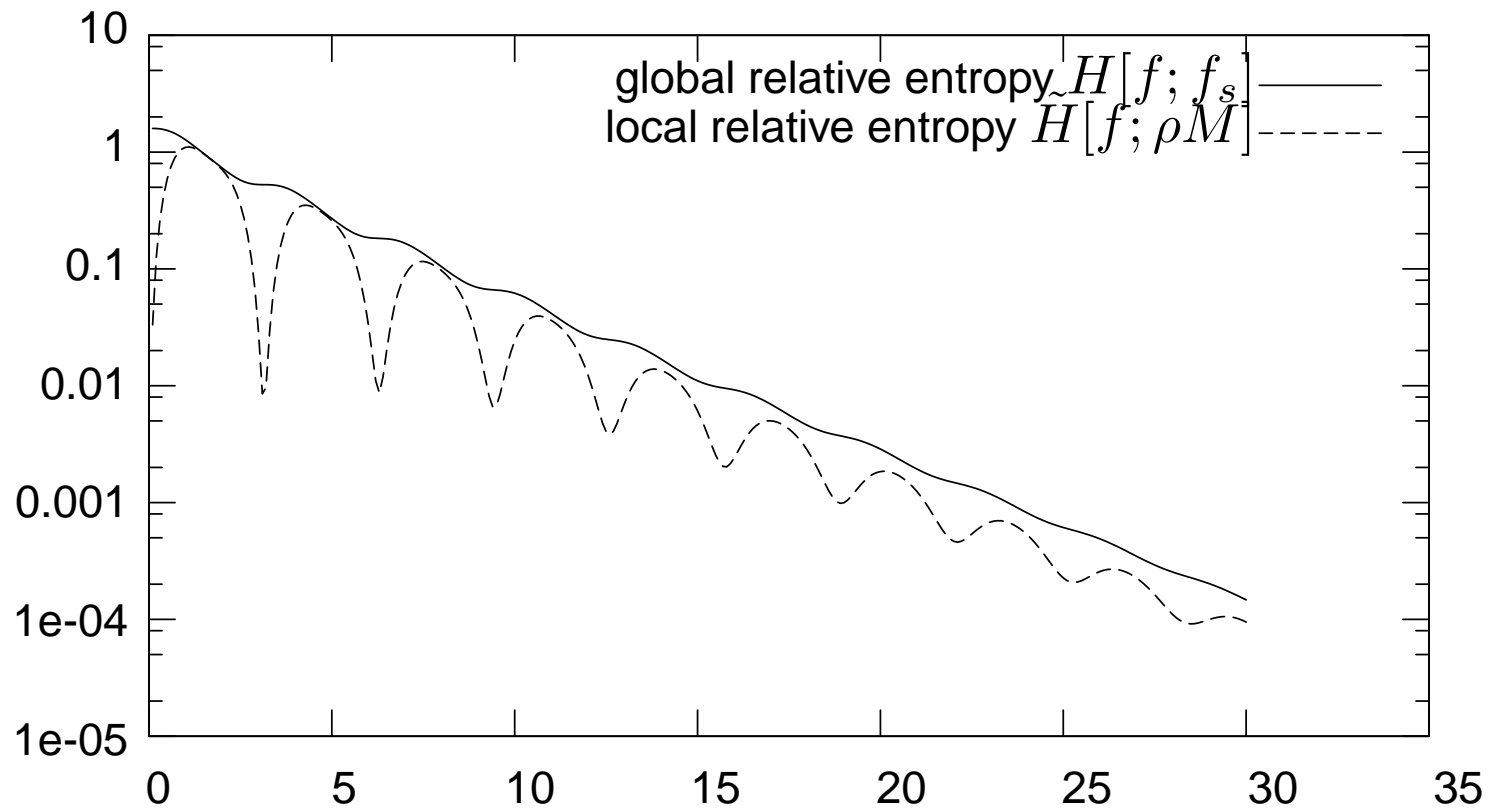
et la convergence en norme  $L^\infty$

256 x 256 points, dt=0.1, WENO-6,4



et les oscillations des entropies relatives

256 x 256 points, dt=0.1, SL, WENO-6,4

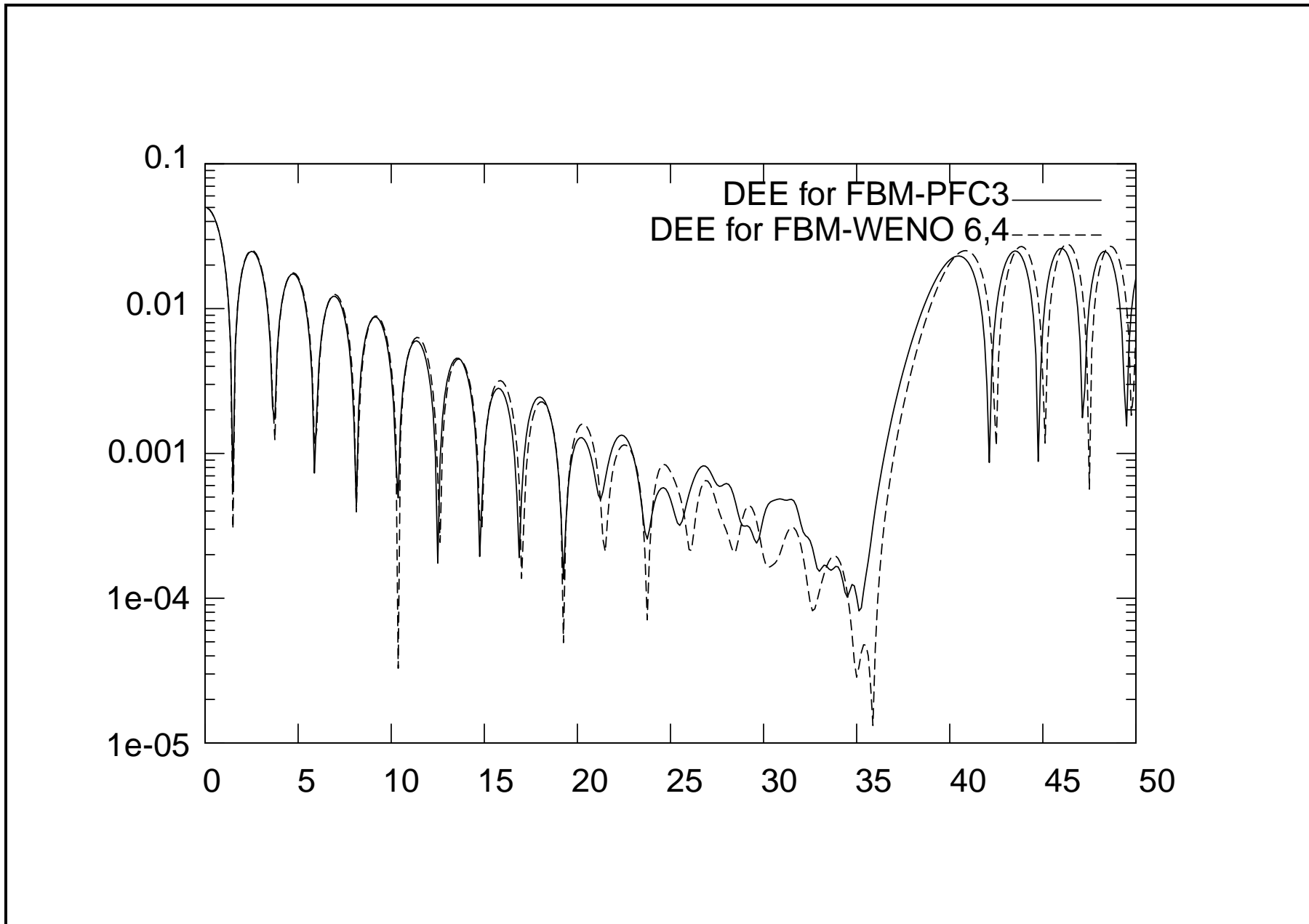


## L'ammortissement de Landau linéaire 1D

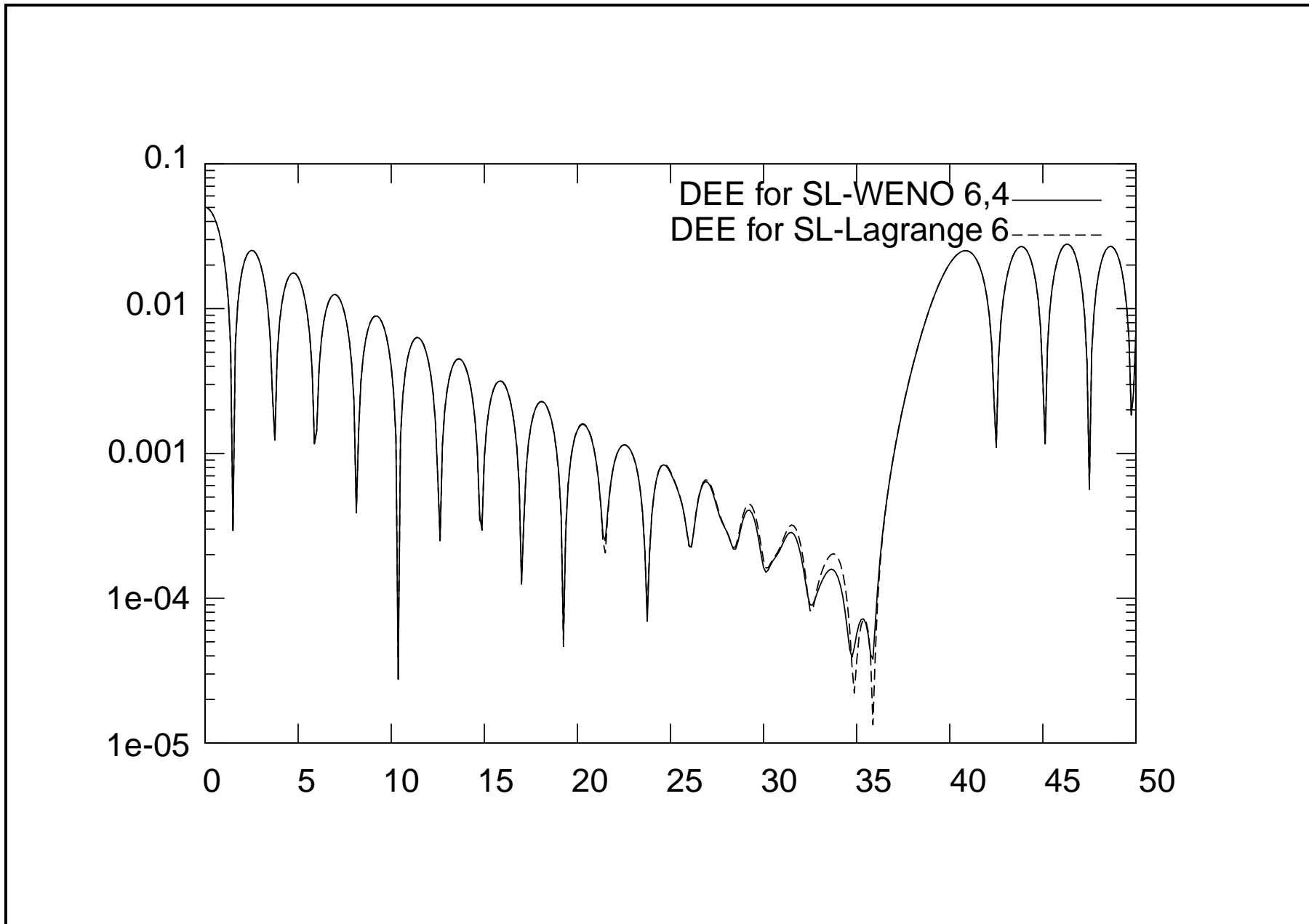
On a considéré l'ammortissement Landau linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ -\Delta \Phi = \int_{\Omega} f dv - 1 \\ E(t, x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ f_0(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \left(1 + 0.01 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \end{array} \right.$$

(avec des conditions de périodicité). Ce qu'on attend d'après la théorie c'est que l'énergie électrique décroisse exponentiellement, jusqu'au temps où apparaît l'effet de récurrence. WENO-6,4 dans la méthode semi-lagrangienne donne de meilleurs résultats que la méthode PFC-3 dans la méthode de conservation des flux et que Lagrange-6 dans la méthode semi-lagrangienne.







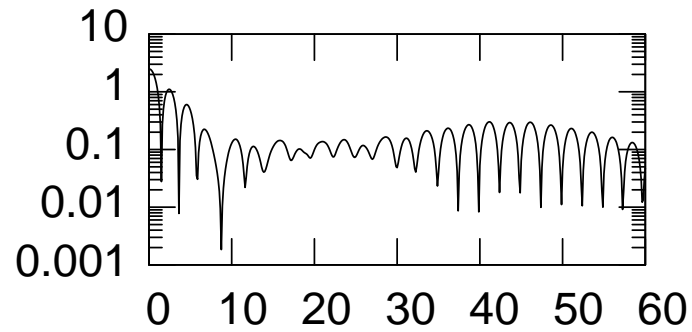
## L'ammortissement de Landau non linéaire 1D

Dans le cas de l'ammortissement non linéaire,

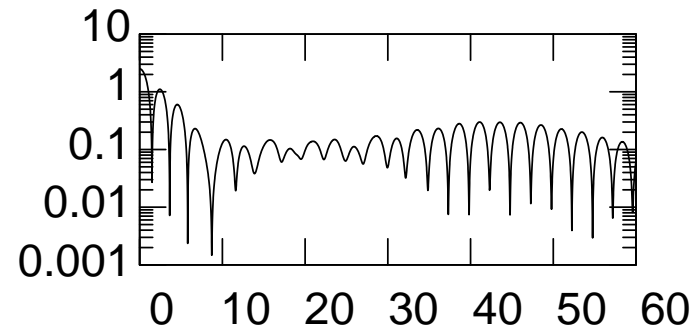
$$f_0(x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \left[1 + 0.5 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

on voit que avec WENO semi-lagrangien les oscillations sont assez atténuées par rapport aux autres méthodes:

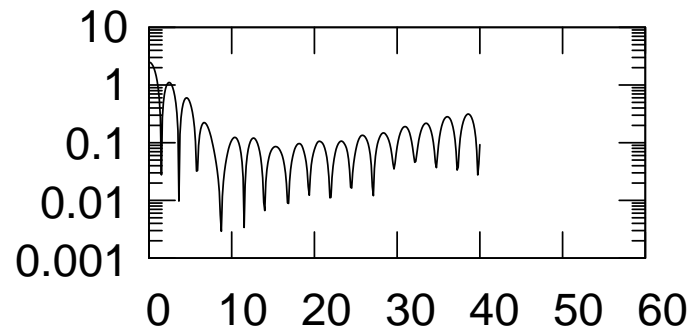
SL-WENO-6,4-32x64-dt=0.125



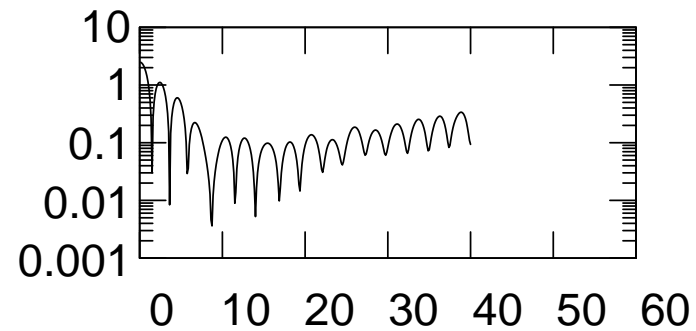
SL-WENO-6,4-32x64-dt=0.01

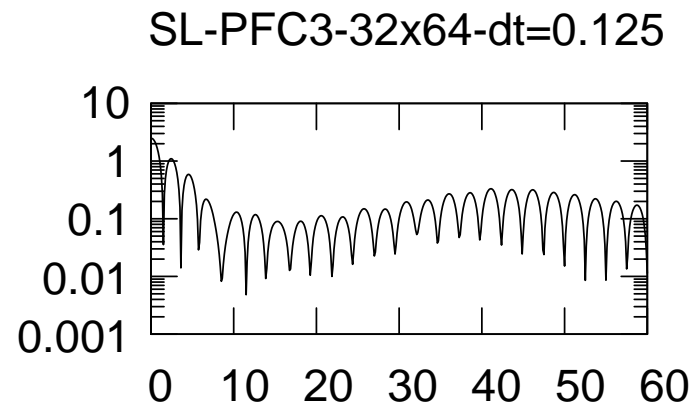
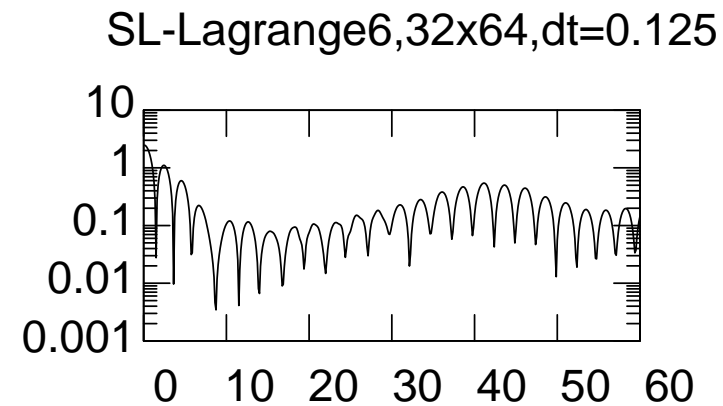
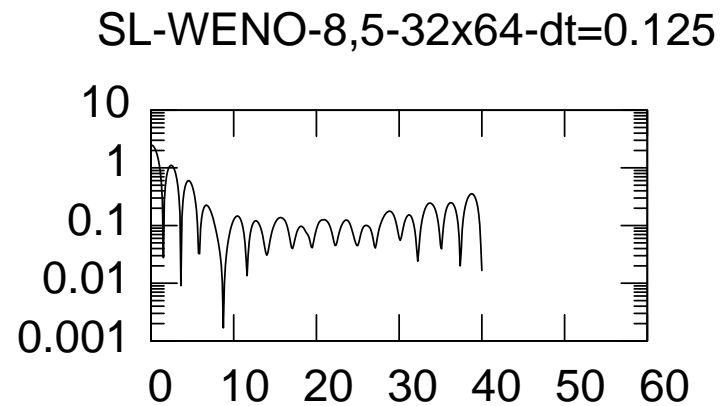


FBM-WENO-6,4-32x64-dt=0.125



SL-WENO-6,4-64x128-dt=0.125

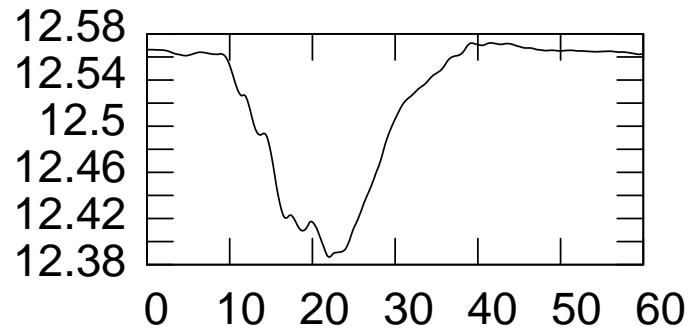




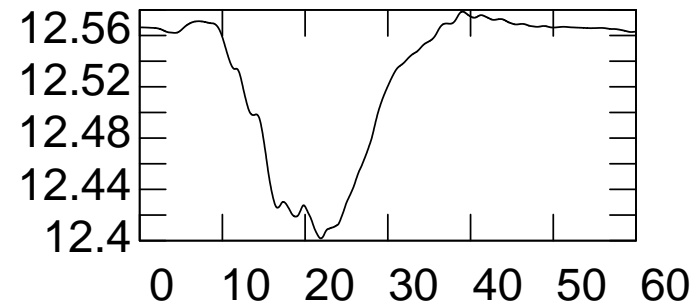
N'étant la méthode semi-lagrangienne conservative, des importantes pertes de masse se vérifient, même si on utilise un pas en temps petit ou on élève l'ordre. En

utilisant plus de points cet effet est retardé.

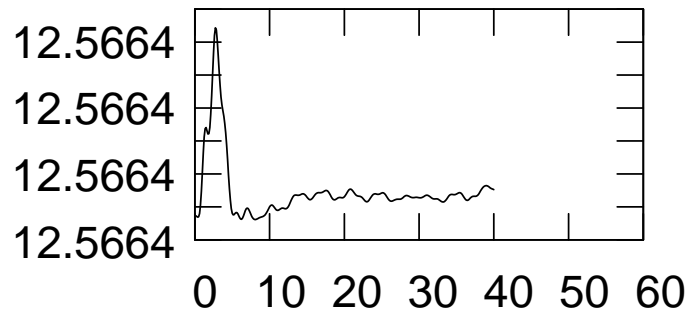
SL-WENO-6,4-32x64-dt=0.125



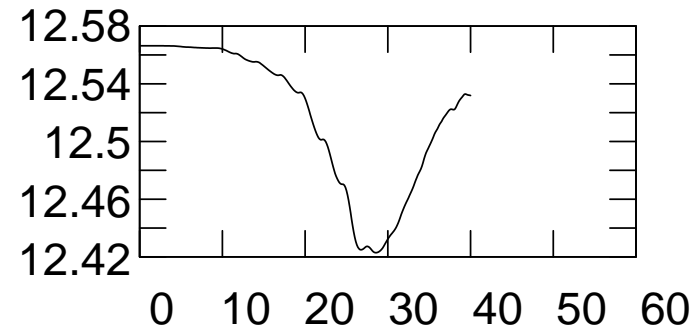
SL-WENO-6,4-32x64-dt=0.01



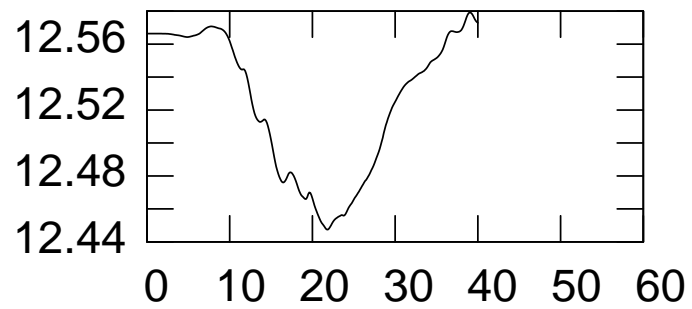
FBM-WENO-6,4-32x64-dt=0.125



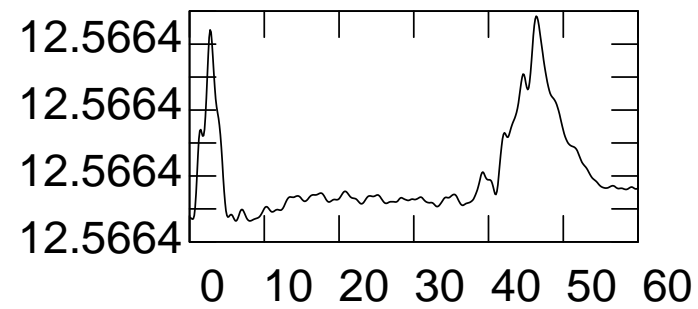
SL-WENO-6,4-64x128-dt=0.125



SL-WENO-8,5-32x64-dt=0.125



SL-Lagrange6,32x64,dt=0.125



SL-PFC3-32x64-dt=0.125

